Text in englisch und deutsch

Pythagoras, the Pure Consonances and Micro-Intervals

If we watch the piano tuner at work, we see that he begins by tuning the perfect fifths. Once they are tuned as perfect consonances, the piano tuner changes the perfect fifth so that it is slightly flattened and no longer pure. This has significant consequences, as will be shown. Why does he tune the pure fifths as a descending fifth? If we stack 12 pure fifths on top of each other and if we stack 7 pure octaves on top of each other, they should arrive at the same pitch. But that is not the case. This is where the phenomenon of the “Pythagorean comma” occurs. It is a distance of 21.51 cents or, if we want to express it in a ratio, with the vibration ratio of 531441 : 524288. Whereby cent is not a unit that results from a measurement. The term “cent” is used to describe the octave in 12 equal distances, where 100 cent = 1 semitone. “Cent” is a simplification for the designation. If we look at a string, we recognize that the frequency is inversely proportional to its string length: the shorter the string, the higher the frequency. If the pitch or the interval is calculated via the proportionality, then we get a measured quantity. However, this discrepancy has caused a very big problem for European and Arabic music theory due to the very small pitch interval, and this problem continues to this day.

Why is that? Where does this problem come from?
Let's look at one possibility, as described in an advanced tempered system.
If the semitone is described by 12√2, then the distance from semitone to semitone is the same, with a value of 1.0494630943593. If we want to calculate the perfect fifth, the formula is 12√2 to the power of 7 = 12√128. From this we can already see that it can no longer be a pure consonance or a perfect fifth. The result is incommensurable, immeasurable. In any case, the calculation 12√2 shows that the distance from semitone to semitone is in principle the same, with a sub-subliminal perfect fifth. For the perfect fifth, the percentage difference to the mathematically determined fifth is -0.11%. This seems a small value, but the result is that we hear a flat fifth. It makes it clear to us how sensitively our perception reacts to a “minimal” value at this point. For the minor second, the percentage value is -0.68%. And yet we cannot hear whether the interval is too high or too low.

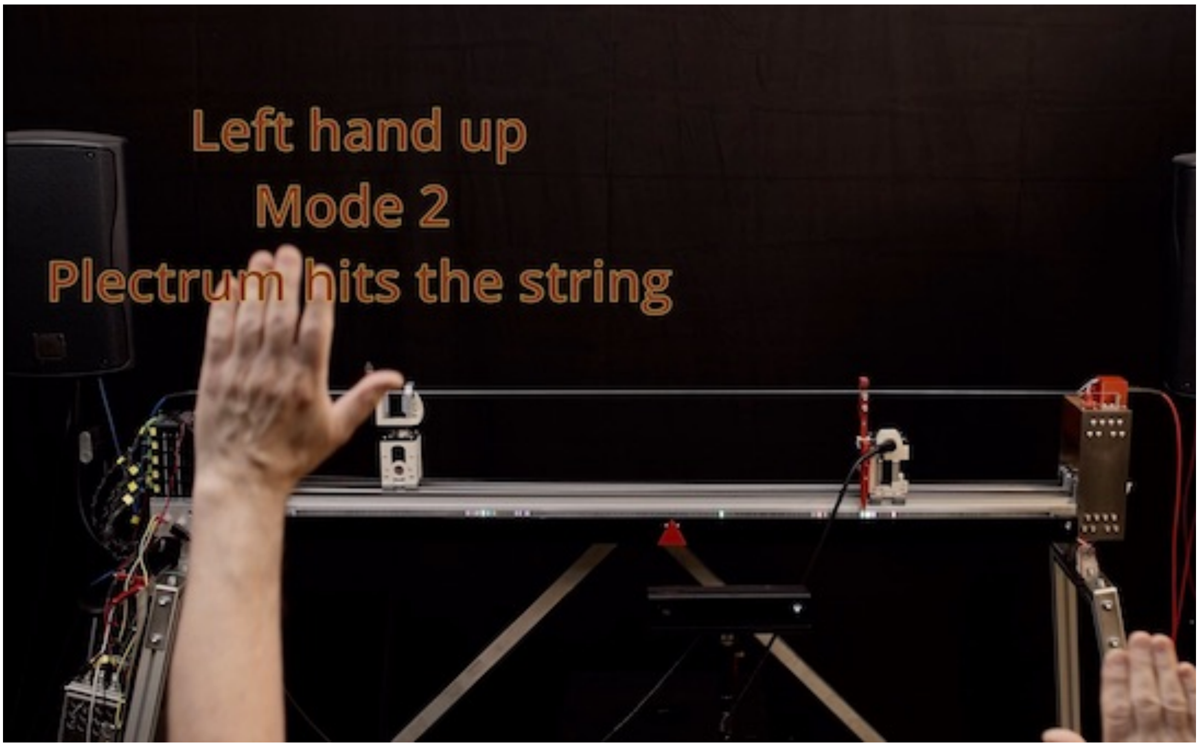
Let's look at a string.
The ratio 1:1 means, when a string vibrates, the string is divided into equal parts and both parts vibrate at the same frequency, also called the pure prime. However, this is where the problems arise: the fifth vibrates at the ratio 3/2, but is no longer pure in the above calculation with the 12√2. The fifth is slightly flat and the other pure consonances are also slightly flat.

Where does this problem come from?
This small interval led to the so-called “wolf fifth” before the tempered systems. If a harpsichord player wanted to play in the system of pure intervals from the C tuning to the E tuning, the fifth in the E tuning appeared so out of tune that it was called the “wolf fifth”. The interval “jaulte”.
With the tempering systems that became established in the Baroque period, the wolf fifth was eliminated by the use of perfect fifths. Now it was possible to play in any key in a composition without retuning. An outstanding example of this is J.S. Bach's “The Well-Tempered Clavier”.

We, people from cultures that have invented complex musical instruments, recognize pure consonances immediately because they are fundamentally anchored in our minds, in our perception, in psychoacoustics and acoustics. Immediately recognizable by musicians and non-musicians. In addition, they can be clearly described in mathematics and are congruent with hearing.
The opposite is true of dissonances: here, a dissonant tone cannot be precisely determined by hearing. It is difficult to say whether a particular dissonance was played high or too low. It cannot be determined by hearing, it can only be determined mathematically. This often proves the discussion as to whether the leading note should be played higher or lower. Here, too, the indeterminable is revealed in the determinate.

Another example of how the perfect fifth and the subtonic fifth presented a problem and how it had to be solved: A budding violinist gets to know the notes through the perfect fifths. He doesn't know where the “d” is after the “c”. The fretless instrument provides no help. The “d” cannot be determined by listening after the “c”. However, since the perfect fifths can be determined exactly both aurally and mathematically, the aspiring violinist gets to know the notes through the perfect fifths. When the violinist meets a pianist, he or she will notice that the perfect fifths do not match the sub-subliminal fifths. To match the piano, he has to play the fifths in a sub-sublime manner, and then he matches the piano. There are a myriad of arguments between piano players and violinists about this. The challenge for the violinist was therefore to learn to think and play chromatically. The piano is fixed in its tones a priori.

Now there is the possibility of dividing the octave into 32 parts or more. The problem is reduced, but does not disappear. The octave would have to be divided into infinitesimal intervals and yet the perfect fifth would not be achieved. This is only a thought, however, because in reality we cannot implement such a system. For a new tone system, I propose to understand the pure consonances as the fundamental difference to the dissonances. In such a theory, all intervals can be integrated, from microtonal intervals to very large intervals. The great common denominator would be: the pure consonances are diametrically opposed to the dissonances.



https://www.skop-ffm.de/movies/Playing_SPO_Instructions.mp4

In the string instrument I developed, which is played with hand gestures and controlled by several microcomputers, the pure consonances are the foundations for a certain indefinite playing. In the programming/composition, “games in the area of the glowing LEDs”, this idea is realized. Each color represents a specific tuning system. In the programming/composition, the values for just intonation, tempered tunings, 12√2 and 128√2 tunings and Pytharorean tuning are stored in large arrays and can be accessed as needed. The dissonances are indicated by a 5mm wide light. The programming/composition only indicates the dissonances by lighting up, no action is taken by the programming/composition. If a player plays in the area of a white or blue glowing LED, for example, then he is free to choose the position and can trigger a note. However, if he plays in the area of the red LED, the pure consonance, then he is drawn to the exact position by the program/composition and can play a pure consonance.

Only the pure consonances are given preferential treatment in the programming/composition, because: they can be clearly heard and clearly designated mathematically. The consonances are determinate-determinate and the dissonances are indeterminate-determinate.

Peter Wießenthaner, Frankfurt, April 3, 2025

Pythagoras, die Reinen Konsonanzen und Mikro-Intervalle

Schauen wir dem Klavierstimmer zu, dann ist der Vorgang so, dass zuerst die Reinen Quinten gestimmt werden. Sind sie als Reine Konsonanten gestimmt, ändert der Klavierstimmer die Reine Quinte so, dass sie leicht unterschwebend, nicht mehr rein sind. Das hat erhebliche Folgen, wie sich zeigen wird. Warum stimmt er die Reinen Quinten unterschwebend? Wenn wir 12 Reine Quinten übereinander türmen und wenn wir 7 Reine Oktaven aufeinander türmen, dann sollten sie an der gleichen Tonhöhe ankommen. Doch das ist nicht der Fall. Hier tritt das Phänomen des „Pythagoreischen Kommas“ auf. Es ist ein Abstand von 21,51 Cent oder wenn wir es in einem Verhältnis ausdrücken wollen, mit dem Schwingungsverhältnis von 531441 : 524288. Wobei Cent keine Einheit ist die aus einer Messung hervorgeht. Es wird mit „Cent“ die Oktave in 12 gleiche Abstände bezeichnet, wobei 100 Cent = 1 Halbtonschritt bedeutet. „Cent“ ist eine Vereinfachung für die Bezeichnung. Wenn wir eine Saite betrachten, dann erkennen wir, dass die Frequenz sich umgekehrt proportional zu ihrer Saitenlänge verhält: je kürzer die Saite ist, umso höher wird die Frequenz. Wenn über die Proportionalität die Tonhöhe berechnet wird oder das Intervall, dann erhalten wir eine gemessene Größe. Wie auch immer: Diese Diskrepanz hat der Europäischen Musiktheorie und auch der Arabischen Musiktheorie ein sehr großes Problem durch den sehr kleinen Tonabstand bereitet und dieses Problem hält bis heute an.

Wieso ist das so? Woher kommt dieses Problem?
Betrachten wir eine Möglichkeit, wie in einem fortgeschrittenen temperierten System die Beschreibung ist.
Wenn der Halbton durch die 12√2 beschrieben ist, dann ist der Abstand von Halbton zu Halbton gleich groß, mit einem Wert von 1,0494630943593. Wenn wir die Reine Quinte berechnen wollen, dann lautet die Formel 12√2 hoch 7 = 12√128. Daran erkennen wir schon, das es sich nicht mehr um eine Reine Konsonanz, bzw. Reine Quinte handeln kann. Das Ergebnis ist inkommensurabel, nicht messbar. Jedenfalls ist durch die Berechnung 12√2 der Abstand von Halbton zu Halbton im Prinzip gleich gross und dabei die Reinen Quinten unterschwebend. Bei der Reinen Quinte ist der prozentuale Unterschied zur mathematisch ermittelten Quinte -0.11 %. Ein scheinbar niedriger Wert, doch im Ergebnis hören wir eine unterschwebende Quinte. Es macht uns deutlich, wie empfindlich unsere Wahrnehmung auf einen „minimale“ Wert an dieser Stelle reagiert. Bei der Kleinen Sekunde beträgt der prozentuale Wert -0.68 %. Und doch können wir nicht hören, ob das Intervall eventuell zu hoch oder zu niedrig ist.

Schauen wir uns eine Saite an.
Das Verhältnis 1:1 bedeutet, bei einer schwingenden Saite, die Saite ist in gleichlange Teile geteilt und beide Teile schwingen in der gleichen Frequenz, auch genannt die Reine Prime. Dann kommen jedoch die Probleme auf: Die Quinte schwingt in dem Verhältnis 3/2, ist jedoch in der oben genannten Berechnung mit der 12√2 nicht mehr rein. Die Quinte schwingt leicht unter und auch die anderen Reinen Konsonanzen schwingen leicht unter.

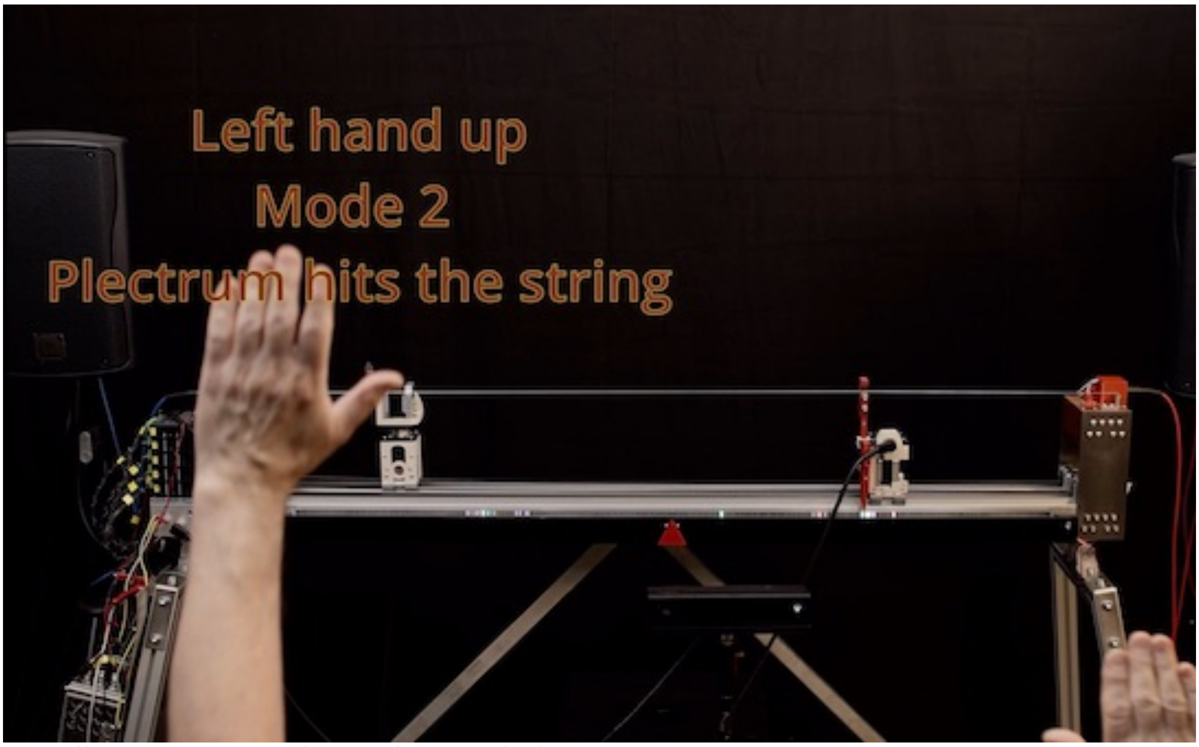
Woher kommt dieses Problem?
Dieser kleine Abstand führte vor den Temperierten Systemen zu der sog. „Wolfsquinte“. Wollte ein Cembalo-Spieler im System der Reinen Intervalle von C-Stimmung bis in E-Stimmung spielen, erschien die Quinte in E-Stimmung so verstimmt, dass sie „Wolfsquinte“ genannt wurde. Das Intervall „jaulte“.
Durch die Temperierten Systeme die sich in der Barockzeit festigten, wurde die Wolfsquinte beseitigt und zwar durch das Unterschweben der Reinen Quinten. Jetzt konnte in einer Komposition durch

alle Tonarten gespielt werden, ohne umzustimmen. Herausragendes Beispiel: „Das Wohltemperierte Klavier“ von J.S. Bach.

Wir, Menschen aus Kulturkreisen die komplexe Musikinstrumente erfunden haben, erkennen die Reinen Konsonanzen sofort, da sie fundamental in unserem Geist, in unserer Wahrnehmung, in der Psychoakustik und Akustik verankert sind. Sofort erkennbar von Musikern und Nicht-Musikern. Zudem sind sie in der Mathematik eindeutig beschreibbar und kongruent mit dem Hören.
Das Gegenteil liegt bei den Dissonanzen vor: hier kann hörend ein dissonanter Ton nicht genau bestimmt werden. Es ist schwierig zu sagen, ob die eine Dissonanz hoch oder zu tief gespielt wurde. Sie kann hörend nicht bestimmt werden, sie läßt sich nur mathematisch genau bestimmen. Das belegt oft die Diskussion, ob der Leitton höher oder tiefer gespielt werden soll. Auch hier zeigt sich das Unbestimmbare im Bestimmten.

Ein anderes Beispiel wie die Reine Quinte und die unterschwebende Quinte ein Problem darstellte und das es zu beheben galt: Ein angehender Violinist lernt die Töne über die Reinen Quinten kennen. Er weiss ja nicht, wo ist denn das „d“ nach dem „c“. Das bundlose Instrument gibt keine Hilfe. Das „d“ kann hörend nach dem „c“ nicht erschlossen werden. Da die Reinen Quinten jedoch hörend und mathematisch genau bestimmt werden können, lernt der angehende Violinist die Töne über die Reinen Quinten kennen. Kommt der Violinist mit einer Klavierspielerin zusammen, dann stellt er fest, dass die Reinen Quinten mit den unterschwebenden Quinten nicht zusammenpaßen. Um mit dem Klavier zusammen zu kommen, muss er die Quinten unterschwebend spielen, dann kommt er mit der Klavier zusammen. Darüber gibt es eine Unzahl an Auseinandersetzungen zwischen Klavier-Spielerinn und Violinisten. Die Forderung war deshalb an den Violinisten: lerne chromatisch zu denken, bzw. zu spielen. Das Klavier ist in seien Tönen a priori festgelegt.

Nun gibt es die Möglichkeit, die Oktave in 32 Teile oder mehr Teile zu teilen. Das Problem wird kleiner, verschwindet nicht. Die Oktave müßte in infinitesimal kleine Abstände geteilt werden und doch würde die Reine Quinte nicht erreicht. Das ist allerdings nur gedacht, denn in der Wirklichkeit können wir solch ein System nicht realisieren. Für ein neues Tonsystem schlage ich vor, die Reinen Konsonanzen als den fundamentalen Unterschied zu den Dissonanzen zu begreifen. In einer solchen Theorie können alle Intervalle eingebunden werden, von den Mikrotonalen Intervallen, bis hin zu sehr grossen Intervallen. Der große gemeinsame Nenner wäre: die Reinen Konsonazen stehen den Dissonanzen diametral gegenüber.



https://www.skop-ffm.de/movies/Playing_SPO_Instructions.mp4

In dem von mir entwickelten Saiteninstrument, das mit Handgesten gespielt wird und von mehreren Mikro-Computern gesteuert wird, sind die Reinen Konsonanzen die Fundamente für ein bestimmt unbestimmtes Spiel. In der Programmierung/Komposition, „Spiele im Bereich der leuchtenden LEDs“ realisiert sich diese Vorstellung. Jede Farbe steht für ein bestimmtes Stimmungssystem. In der Programmierung/Komposition sind die Werte für die Reine Stimmung, Temperierte Stimmungen, 12√2- und 128√2 Stimmung und Pytharoräische Stimmung in grossen Arrays abgelegt, sie können bei Bedarf aufgerufen werden. Die Dissonanzen sind durch ein Leuchten von 5mm Breite angezeigt. Die Programmierung/Komposition zeigt einzig die Dissonanzen nur durch Leuchten an, es findet keine Aktion durch die Programmierung/Komposition statt. Spielt ein Spieler z.B. im Bereich einer weiß- oder blau leuchtenden LED, dann hat er freie Wahl in der Bestimmung der Position und kann einen Ton auslösen. Spielt er allerdings im Bereich der rot leuchtenden LED, der Reinen Konsonanz, dann wird er durch das Programm/Komposition an die exakte Position gezogen und kann eine Reine Konsonanz spielen.

Nur die Reinen Konsonazen werden in der Programmierung/Komposition bevorzugt behandelt, denn: sie sind eindeutig zu hören und eindeutig mathematisch zu bezeichnen. Die Konsonanzen sind bestimmt-bestimmt und die Dissonanzen sind unbestimmt-bestimmt.

Peter Wießenthaner, Frankfurt, 03. April 2025